А.М. Инков

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ. ЛЕКЦИЯ № 2



Шымкент, 2011

Тема 2 Математические модели объектов идентификации

Лекция 2 Общие сведения о математических моделях и их классификация

Данная лекция содержит обзорно-теоретический материал по следующим вопросам и проблемам: общие сведения о математических моделях и их классификация; множество моделей, структуры моделей; линейные модели и множества линейных моделей; семейство моделей передаточных функций; модели в пространстве состояний; модели с распределенными параметрами; временные характеристики; дискретные модели; дискретные модели в пространстве состояний; статические и динамические модели в форме управления регрессии.

Классификация математических моделей

Могут быть предложены различные методы классификации моделей объектов и систем, рассмотрим основные из них.

Физические модели. В основу классификации положена степень абстрагирования модели от оригинала. Предварительно все модели можно подразделить на две группы: материальные (физические) и абстрактные (математические). Физической моделью обычно называют систему, которая эквивалентна или подобна оригиналу, либо у которой процесс функционирования такой же, как у оригинала, и имеет ту же или другую физическую природу. Можно выделить следующие виды физических моделей: натурные, квазинатурные, масштабные и аналоговые.

Натурные модели — это реальные исследуемые системы. Их называют макетами и опытными образцами. Натурные модели имеют полную адекватность с системой-оригиналом, что обеспечивает высокую точность и достоверность результатов моделирования. Процесс проектирования ВС завершается зачастую испытанием опытных образцов. Квазинатурные модели представляют собой совокупность натурных и математических моделей. Этот вид моделей используется в случаях, когда математическая модель части системы не является удовлетворительной (например, модель человека-оператора) или когда часть системы должна быть исследована во взаимодействии с остальными частями, но их еще не существует, либо их включение в модель затруднено или дорого. Примерами квазинатурных моделей могут служить вычислительные полигоны, на которых отрабатывается программное обеспечение различных систем, или реальные АСУ, исследуемые совместно с математическими моделями соответствующих производств.

Масштабная модель — это система той же физической природы, что и оригинал, но отличающаяся от него масштабами. Методологической основой масштабного моделирования является теория подобия, которая предусматривает соблюдение геометрического подобия оригинала и модели и соответствующих масштабов для их параметров. При проектировании ВС масштабные модели могут использоваться для анализа вариантов компоновочных решений по конструкции системы и ее элементов.

Аналоговыми моделями называются системы, имеющие физическую природу, отличающуюся от оригинала, но сходные с оригиналом процессы функционирования. Обязательным условием при этом является однозначное соответствие между парамет-

рами изучаемого объекта и его модели, а также тождественность безразмерных математических описаний процессов, протекающих в них. Для создания аналоговой модели требуется наличие математического описания изучаемой системы. В качестве аналоговых моделей' используются механические, гидравлические, пневматические системы, но наиболее широкое применение получили электрические и электронные аналоговые модели, в которых сила тока или напряжение являются аналогами физических величин другой природы. Особенностью аналоговых моделей является их гибкость и простота адаптации к изменению и измерению количественных значений параметров и характеристик моделируемой системы. Аналоговые модели используют при исследовании средств вычислительной техники на уровне логических элементов и электрических цепей, а также на системном уровне, когда функционирование системы описывается, например, дифференциальными или алгебраическими уравнениями.

Математические модели. Математическая модель представляет собой формализованное описание системы с помощью абстрактного языка, в частности с помощью математических соотношений, отражающих процесс функционирования системы. Для составления модели можно использовать любые математические средства — алгебраическое, дифференциальное и интегральное исчисление, теорию множеств, теорию алгоритмов и т. д. По существу вся математика создана для составления и исследования моделей объектов или процессов.

К средствам **абстрактного описания систем** относятся также языки химических формул, схем, чертежей, карт, диаграмм и т. п. Выбор вида модели определяется особенностями изучаемой системы и целями моделирования, так как исследование модели позволяет получить ответы на определенную группу вопросов. Для получения другой информации может потребоваться модель другого вида.

Цели моделирования и характерные черты оригинала определяют в конечном счете ряд других особенностей моделей и методы их исследования. Например, математические модели можно классифицировать на детерминированные и вероятностные (стохастические). Первые устанавливают однозначное соответствие между параметрами и характеристиками модели, а вторые — между статистическими значениями этих величин. Выбор того или иного вида модели обусловлен степенью необходимости учета случайных факторов. Среди математических моделей можно выделить по методу их исследования аналитические, численные и имитационные модели.

Аналитической моделью называется такое формализованное описание системы, которое позволяет получить решение уравнения в явном виде, используя известный математический аппарат.

Численная модель характеризуется зависимостью такого вида, который допускает только частные численные решения для конкретных начальных условий и количественных параметров модели.

Имитационная модель — это совокупность описания системы и внешних воздействий, алгоритмов функционирования системы или правил изменения состояния системы под влиянием внешних и внутренних возмущений. Эти алгоритмы и правила не дают возможности использования имеющихся математических методов аналитического и численного решения, но позволяют имитировать процесс функционирования системы и производить измерения интересующих характеристик.

Многообразие систем и объектов, проявляющееся в многообразии их структурно-функциональной организации, определяет использование множества разных моделей, которые могут быть классифицированы в зависимости от:

1) характера функционирования исследуемой системы:
   - детерминированные, функционирование которых описывается детерминированными величинами;
   - стохастические или вероятностные, функционирование которых описывается случайными величинами.
2) характера протекающих в исследуемой системе процессов:
   - непрерывные, в которых процессы протекают непрерывно во времени;
   - дискретные, в которых процессы меняют свое состояние в дискретные моменты времени.
3) степени достоверности исходных данных об исследуемой системе:
   - с априорно известными параметрами;
   - с неизвестными параметрами.
4) режима функционирования системы:
   - стационарные, в которых характеристики не меняются со временем;
   - нестационарные, в которых характеристики изменяются со временем.
5) назначения:
   - статические или структурные, отображающие состав и структуру системы;
   - динамические или функциональные, отображающие функционирование системы во времени;
   - структурно-функциональные, отображающие структурные и функциональные особенности организации исследуемой системы.
6) способа представления (описания) и реализации:
   - концептуальные или содержательные, представляющие собой описание (в простейшем случае словесное) наиболее существенных особенностей структурно-функциональной организации исследуемой системы;
   - физические или материальные - модели, эквивалентные или подобные оригиналу (макеты) или процесс функционирования которых такой же как у оригинала и имеет ту же или другую физическую природу;
   - математические или абстрактные, представляющие собой формализованное описание системы с помощью абстрактного языка, в частности с помощью математических соотношений, отражающих процесс функционирования системы;
   - программные (алгоритмические, компьютерные), основанные на применении средств ВТ и представляющие собой обычно программный комплекс, и позволяющие наглядно и эффектно представить исследуемый объект посредством имитации или графического отображения математических зависимостей, описывающих искомый объект.

В дальнейшем нами основное внимание уделяется математическому моделированию, широко используемому при исследовании сложных технических систем.

Отметим, что одни и те же объекты могут быть описаны различными по сложности математическими моделями. Главным критерием выбора при этом является её **адекватность** исследуемому объекту.

Математические модели статических (ММС) объектов

Постановка задачи моделирования и идентификации статических характеристик объектов (см рисунок 2.1).

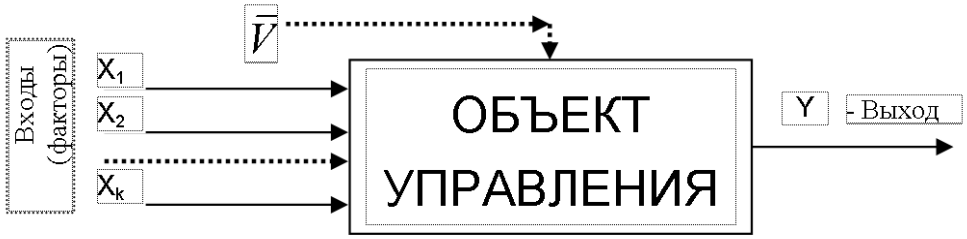


Рисунок 2.1 - Структура объекта статики

Статические характеристики широко применяются при расчете и исследовании систем в условиях установившихся состояний, когда все переходные процессы или завершились, или ими можно пренебречь. Характерной особенностью ММС является то, что в них отсутствуют производные по времени.

В общем виде ММС объекта – функция отклика, связывающая входные параметры X с входными $Y = \varphi(X_1, X_2 ... X_K)$ при наличии вектора возмущений V. При использовании статистических методов ММ статики обычно представляется в виде уравнения регрессии (полинома, отрезка ряда Тейлора, в который разлагается функция φ):

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i \cdot X_i + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} \cdot X_i^2 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} b_{ij} \cdot X_i \cdot X_j \qquad (2.1)$$

где $\hat{Y}$ - расчетное значение выхода; X_i - входы;

$\bar{V}$ - вектор возмущений (шумы, помехи); N, n – количество опытов;

N0, n0 , – количество параллельных (дублирующих) опытов или опытов в центре плана; m – количество серий параллельных опытов;

k - количество входов (факторов, степень полинома);

N_{EX} – число экспериментальных точек плана;

L ; $L_{ЗН}$ – соответственно количество всех и значимых коэффициентов в уравнении регрессии;

$b_0, b_1, b_2, b_3, ...$ - выборочные коэффициенты регрессии, определяемые в результате идентификации;

b_0 - свободный член уравнения регрессии;

$b_1, b_2, b_3, \ldots$ - линейные эффекты; $b_{11}, b_{22}, b_{33}, \ldots$ - квадратичные эффекты;

$b_{12}, b_{23}, b_{13}, \ldots$ - эффекты парного взаимодействия;

$b_{111}, b_{222}, b_{333}, \ldots$ - эффекты тройного взаимодействия;

Например, чисто применяют вид уравнения для k=3 (L =10):

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 + b_3 \cdot X_3 + b_{11} \cdot X_1^2 + b_{22} \cdot X_2^2 + b_{33} \cdot X_3^2 + b_{12} \cdot X_1 \cdot X_2 + b_{13} \cdot X_1 \cdot X_3 + b_{23} \cdot X_2 \cdot X_3 + b_{123} \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \qquad (2.2)$$

Могут применяться и другие виды ММС, в том числе и отражающие физическую природу изучаемого явления или объекта. Выбор модели вида (2.2) обусловлен его простотой, и , достаточно большой точностью описания исследуемых зависимостей. Дополнительные замечания по поводу выбора вида математической модели (уравнения регрессии). Традиционно используется вид (1), при необходимости (если уравнение не адекватно описывает эксперимент) могут быть добавлены члены вида $bi \cdot X_i^3$, $b_j \cdot X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$ и т.д. Особых вычислительных трудностей при определении значений коэффициентов b_i уравнения регрессии b_i при этом не возникает, однако, характер изменения поведения графика функции высоких порядков сразу за пределами диапазона аппроксимации и даже между точками, найденными экспериментально может бать непредсказуем.

Математические модели линейных динамических (ММД) объектов и систем и связь между ними. ММД.

Широко используются при анализе и синтезе различных систем автоматизации (см. рисунок 2.2). ММД описывают изменение параметров во времени, в их выражения обязательно присутствуют производные по времени или другие эквивалентные им параметры. Очень часто (в обоснованных случаях) используют линейные ММД.



Рисунок 2.2 – Объект динамики

Принято обозначать векторы входных воздействий буквой U (управления), векторы выходных воздействий буквой X (состояния) или Y (выходы), векторы возмущающих воздействий буквой V(на рисунке 2.2 – не показаны)

Все ММД можно разделить на классы.

1 Модели для описания непрерывных систем

Линейные **дифференциальные уравнения** (ДУ) это наиболее общая форма описания динамики, однако их практическое использование и инженерной практике часто бывает сложным.

Наиболее общий вид записи ДУ:

$$a_{n+1}\frac{d^n x}{dt^n}+\ldots+a_2\frac{dx}{dt}+a_1 x=b_{m+1}\frac{d^m u}{dt^m}+\ldots+b_2\frac{du}{dt}+b_1 u \qquad (2.3).$$

Передаточные функции (ПФ). В инженерной практике часто используются ММД в виде ПФ. Для объектов с самовыравниванием ПФ в общем виде:

$$W(p)=C\cdot\frac{b_1+b_2\cdot p+\ldots+b_{m+1}\cdot p^m}{a_1+a_2\cdot p+\ldots+a_{n+1}\cdot p^n}\cdot\exp(-p\cdot\tau)\,.\ (n\geq m) \qquad (2.4)$$

При использовании «метода площадей» (b1=a1=1) [ ]:

$$W(p)=C\cdot\frac{b_1+b_2\cdot p}{a_1+a_2\cdot p+a_3\cdot p^2}\cdot\exp(-p\cdot\tau)\text{, или} \qquad (2.5)$$

$$W(p)=C\cdot\frac{b_1}{a_1+a_2\cdot p+a_3\cdot p^2+a_4\cdot p^3}\cdot\exp(-p\cdot\tau) \qquad (2.6)$$

Другие виды, например:

$$W(p)=\frac{C\cdot\exp(-p\cdot\tau)}{\prod_{i=1}^{n}(1+T_i\cdot p)}\text{ и т.п.} \qquad (2.7)$$

Очень часто применяют упрощенное выражение ПФ в виде апериодического звена с запаздыванием:

$$W(p) = \frac{C}{1 + T \cdot p} \cdot \exp(-p \cdot \tau) \qquad (2.8)$$

Для объектов без самовыравнивания используется передаточная функция в общем случае используется в виде:

$$W(p) = \left[\frac{D}{p} - C \cdot \frac{b_1 + b_2 \cdot p + \ldots + b_{m+1} \cdot p^m}{a_1 + a_2 \cdot p + \ldots + a_{n+1} \cdot p^n} \right] \cdot \exp(-p \cdot t) \qquad (2.9)$$

(обращаем внимание на то, что здесь присутствует **интегральная** составляющая - величина 1/p)
или упрощенные выражения для объектов без самовыравнивания:

$$W(p) = \frac{C}{p \cdot T_Б \cdot (1 + T \cdot p)} \cdot \exp(-p \cdot \tau) \text{ или:} \qquad (2.10)$$

$$W(p) = \frac{C}{T \cdot p} \cdot \exp(-p \cdot \tau) \qquad (2.11)$$

Конкретный вид W(p) выбирается из условия обеспечения адекватности и удобства вычислений.

Адекватность математической модели может быть, например, оценена по формуле (2.12). Если значение δ, найденное по этой формуле, не превышает 3-7%, то модель считается адекватной:

$$\delta = \frac{100\%}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{X_i - \hat{X}_i}{X_i} \qquad (2.12)$$

Для уравнения вида (2.8) выход $\hat{X}_i$ определяется аналитически по формуле (см. пример на рисунке 8.7):

$$\hat{X}(t) = C \cdot \Delta U \cdot \left[1 - \exp(-\frac{t-\tau}{T})\right] \text{ (при } \quad t \geq \tau) \qquad (2.13)$$

$$\hat{X}(t) = 0 \text{ (при } \quad t < \tau) \qquad (2.13А)$$

а для W(p) вида (2.7) при n=2:

$$W(p) = \frac{C \cdot \exp(-p \cdot \tau)}{(1 + T_1 \cdot p) \cdot (1 + T_2 \cdot p)}$$

$$\hat{X}(t) = C \cdot \Delta U \cdot \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot \exp(-\frac{t-\tau}{T_1}) + \frac{T_2}{T_1 - T_2} \cdot \exp(-\frac{t-\tau}{T_2})\right) \qquad (2.14)$$

В более общем случае в качестве критерия соответствия при решении данной задачи берут критерий вида:

$$\min(F_{ai}),\ F(a_i) = \sum_{j=1}^{n} \left(X_i - \hat{X}_i\right)^2 \qquad (2.15)$$

где X_i – экспериментальное значение;

$\hat{X}_i$ – расчётное значение.

Для нахождения коэффициентов a_i составляют уравнения:

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = 0 \qquad (2.16)$$

Таким образом, получается система уравнений, решая которую можно определить a_i.

Адекватность полученных математических моделей статики может проверяться проверялась по критерию Фишера [1] (см. также следующую лекцию). Дополнительно для этого может быть использован более удобный т.н. критерии пригодности приближения [5] R-квадрат (коэффициент детерминации), используемый для оценки точности нелинейных моделей. Критерий R-квадрат может принимать значения только от нуля до единицы и чем ближе он к единице, тем лучше параметрическая модель приближает исходные данные.

Для его определения вначале вычисляется критерий SSE (Sum of squares due to error) - сумма квадратов ошибок по формуле:

$$SSE = \sum_{k=1}^{n} w_k \cdot (y_k - \hat{y}_k)^2 ,$$

где w_k - веса (у нас они не заданы, и считаются равными единице);

y_k - экспериментальные (исходные) значения данных для каждого опыта;

$\hat{y}_k$ - расчетные (предсказанные) значения данных для каждого опыта, получены по формуле (1);

n - количество экспериментальных значений (например, n=20).

Критерий R-квадрат (обозначенный ниже как R) определяется как отношение суммы квадратов относительно регрессии SSR к полной сумме квадратов (SST), т.е.:

$$SSR = \sum_{k=1}^{n} w_k \cdot (\hat{y}_k - \bar{y}_k)^2; \qquad SST = \sum_{k=1}^{n} w_k \cdot (y_k - \bar{y}_k)^2; \qquad R = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST},$$

где $\bar{y}_k$ - среднее значение экспериментальных (исходных) значения данных.

Близость полученных значений критерия R-квадрат к единице говорит о высокой точности описания эксперимента, например выражением вида (2.2). Обычно приемлемыми для практики считают значения критерия R-квадрат выше 0,9.

Данный показатель является статистической мерой согласия, с помощью которой можно определить, насколько уравнение регрессии соответствует реальным данным.Коэффициент детерминации изменяется в диапазоне от 0 до 1. Если он равен 0, это означает, что связь между переменными регрессионной модели отсутствует, и вместо нее для оценки значения выходной переменной можно с таким же успехом использовать простое среднее ее наблюдаемых значений. Напротив, если коэффициент детерминации равен 1, это соответствует идеальной модели, когда все точки наблюдений лежат точно на линии регрессии, т.е. сумма квадратов их отклонений равна 0. На практике, если коэффициент детерминации близок к 1, это указывает на то, что модель работает очень хорошо (имеет высокую значимость), а если к 0, то это означает низкую значимость модели, когда входная переменная плохо "объясняет" поведение выходной, т.е. линейная зависимость между ними отсутствует. Очевидно, что такая модель будет иметь низкую эффективность. Кроме того о точности аппроксимации результатов эксперимента можно дополнительно судить по

значениям суммарных абсолютных и относительных ошибок и анализируя графики сравнения расчетных и экспериментально найденных значений выхода для каждого опыта.

Иногда показателям тесноты связи можно дать качественную оценку (шкала Чеддока):

Количественная мера тесноты связи	Качественная характеристика силы связи
0,1 - 0,3	Слабая
0,3 - 0,5	Умеренная
0,5 - 0,7	Заметная
0,7 - 0,9	Высокая
0,9 - 0,99	Весьма высокая

Функциональная связь возникает при значении равном 1, а отсутствие связи — 0. При значениях показателей тесноты связи меньше 0,7 величина коэффициента детерминации всегда будет ниже 50 %. Это означает, что на долю вариации факторных признаков приходится меньшая часть по сравнению с остальными неучтенными в модели факторами, влияющими на изменение результативного показателя. Построенные при таких условиях регрессионные модели имеют низкое практическое значение.

Частотные характеристики (ЧХ). При подаче на вход **линейной** системы сигнала:

$$U(t) = A_u \sin(\omega t) = A_u \cdot \exp(j\omega t) \qquad (2.17)$$

на выходе будет сигнал:

$$X(t) = A_x \sin(\omega t + \varphi) = A_x \cdot \exp(j\omega t + \varphi), \qquad (2.18)$$

а АФЧХ имеет вид:

$$W(j\omega) = C \cdot \frac{b_1 + b_2 \cdot j\omega + \ldots + b_{m+1} \cdot j\omega^m}{a_1 + a_2 \cdot j\omega + \ldots + a_{n+1} \cdot j\omega^n} \cdot \exp(-j\omega \cdot \tau) =$$

$$= A(\omega) \cdot \exp(j\phi(\omega)) = \mathrm{Re}W(\omega) + \mathrm{Im}W(\omega) \qquad (2.19),$$

Где:

$$A(\omega) = \sqrt{[\mathrm{Re}W(\omega)]^2 + [\mathrm{Im}W(\omega)]^2} \qquad (2.20)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{[\mathrm{Im}W(\omega)]}{[\mathrm{Re}W(\omega)]} \qquad (2.21)$$

Используются также **весовые функции**:

$$x(t) = \int_0^t g(t-\tau)y(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad , \qquad (2.22)$$

И системы матричных **линейных уравнений пространства состояния**:

Модель в пространстве параметров состояния

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bU \\ y &= C^T x \end{aligned} \quad , \qquad (2.23)$$

где

U - вектор входа; x - вектор переменных состояния; y - вектор выхода системы;

A - матрица динамики системы; B - матрица управления; C^T - матрица измерения (датчиков)

или

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A \cdot x(t) + B \cdot u(t); \\ y(t) &= C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{aligned} , \qquad (2.24)$$

2 Модели для описания дискретных систем

Линейные разностные уравнения

Математические модели в цифровых системах управления записываются в виде рекуррентных разностных уравнений .

Если математическая модель ТОУ представлена передаточной функцией вида (2.8) и использован **фиксатор нулевого порядк**а, то выход объекта в цифровом виде для момента времени T_j определяется как:

$$X_j = A \cdot X_{j-1} + B \cdot U_{j-D} \qquad (2.25)$$

где $A = -\exp(-T_O / T)$, $B = (1 - A) \cdot C$, $D = [\tau / T_O]$

Уравнение (2.25) является разностным эквивалентом непрерывного уравнения объекта (2.8) для дискретных моментов времени j = 1, 2, 3, ….

D - число, округленное до ближайшего большего целого, определяет запаздывание ТОУ, выраженное в целом числе периодов опроса T_O.

Для j < D:

$X_j = A \cdot X_{j-1}$ X_{j-1} - выход объекта в момент времени T_j - T_O, т.е. на прошлом шаге опроса.

U_{j-D} - управляющее воздействие (выход регулятора) в момент времени T_j -D.

Дискретные передаточные функции:

$$W(z) = \frac{y(z)}{U(z)} = \frac{b_m z^{-n} + b_{m-1} z^{m-1} + \ldots b_0}{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-(n-1)} + \ldots a_0} \qquad (2.26)$$

Модель в пространстве параметров состояния

x(k+1)=A*x(k)+B*U(k) (2.27)
y(k)=Cт*x(k)

цифровые разностные рекуррентные уравнения:

$X_j = A \cdot X_{j-1} + B \cdot U_{j-D}$. (2.29)

3 Модели для описания нелинейных систем (см рисунок 2.3)

$u(t)=\delta(t)$ $y(t)=\omega(t)$

$$y(t) = \int_0^{\infty} \omega(\tau) \cdot u(t-\tau) d\tau$$

$$y(t) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \omega(\tau_1, \tau_2) \cdot u(t-\tau_1) \cdot u(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \qquad (2.30)$$

$$y(t) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \omega(\tau_1\tau_2\tau_3) \cdot u(t-\tau_1) \cdot u(t-\tau_2) \cdot u(t-\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \qquad (2.31)$$

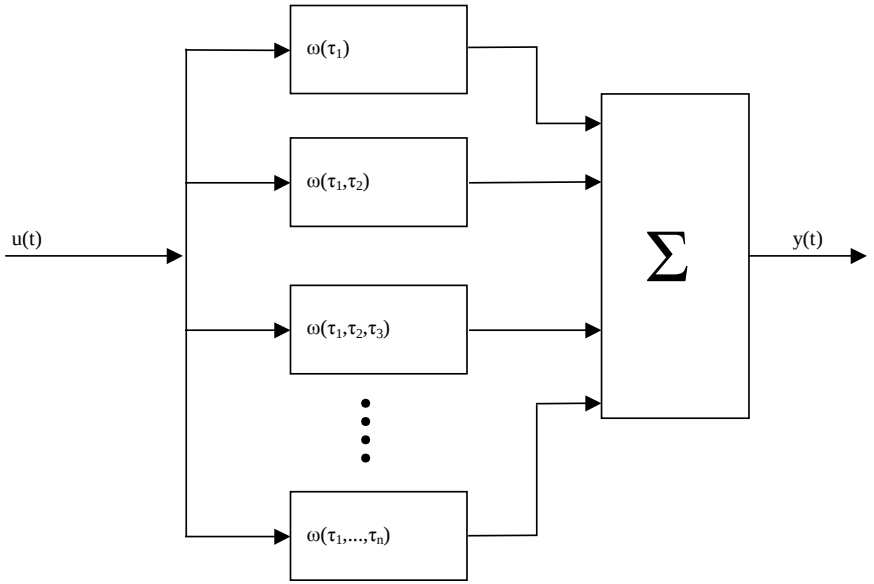


Рисунок 2.3 – нелинейные модели динамики

4 Стохастические модели. Модель нелинейной системы с использованием ядер Вольтера. При рассмотрении явлений в моделях с шумами принято оценивать влияние шумов на процесс идентификации путем использования понятий авто - и взаимно - корреляционной функций. Оценку влияния шумов можно производить, если процесс описания шумов описать следующим уравнением:

$$R_{uy}(\tau) = \int_0^{\infty} \omega(t) R_{uu}(t-\tau) dt \qquad (2.31)$$

R_{uu}- автокорреляционная функция входного сигнала (см. в лекции 6) ;

R_{uy}- взаимнокорреляционная функция входного и выходного сигнала.

Если u(t) – это случайный стационарный процесс и y(t) тоже, то, применяя эти понятия не учитывают, что R_{uu} и R_{uy} позволяют оценить величину случайной составляющей, то, решая это интегральное уравнение мы можем получать оценки с учетом помех входа и выхода. Задача имеет решение при условии, что входной сигнал можно измерять “абсолютно” точно, а выходной сигнал содержит все аддитивные составляющие помехи.

Таким образом по типу идентифицируемой модели можно выделить: линейная и нелинейная; детерминированная и стохастическая; с непрерывным и дискретным временем; стационарная и нестационарная; одномерная и многомерная; статическая и динамическая; с сосредоточенными и распределёнными параметрами. Студент должен уметь привести примеры таких объектов.

Свойства идентификации: управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость.

Управляемость – система управляема, если для любого момента времени при любых состояниях существует такое управление u, которое переводит начальное состояние системы в конечное.

$$u_y = \left[B; AB; \ldots A^{n-1}B\right]$$

где n – порядок системы; A – матрица коэффициентов при x;

B – матрица коэффициентов при r.

Условием управляемости системы является то, чтобы $\det u_y$ не был равен нулю.

Наблюдаемость – система наблюдаема, если любое или все ее состояния можно непосредственно или косвенно определить по выходному вектору системы.

$u_н = \left[C^T; C^T A^T; \ldots C^T \left(A^{n-1}\right)^T\right]$, где C – матрица выхода, коэффициенты при y.

Хотя бы один минор не должен быть равен нулю, в этом случае система наблюдаема.

Идентифицируемость – система идентифицируема, если по изменениям координат состояния системы можно определить ее параметры.

$$ID = \left[V(0); A^n V(0); \ldots A^{nn} V(0)\right],$$

где V(0) – вектор начальных условий; Ап – матрица перехода.

$A^n = A^R + I$,

где AR – расширенная матрица; I – единичная матрица.

Система идентифицируема, если $\det \neq 0$.

Идентификация динамических систем. Допустим, динамическая система описана передаточной функцией следующего вида:

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + ... + b_{m+1} p + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_{n-1} p + a_n}$$

Получаем систему дифференциальных уравнений первого порядка из n - уравнений

$$\frac{dx}{dt} = AX(t) + BU(t)$$

$$Y(t) = CX(t)$$

где Y – выходные переменные, U(t) – входные переменные, X – внутренние переменные.

Как получить эту систему?

I. а) $W(p) = \frac{y(p)}{u(p)}$ б) $p = \frac{d}{dt}$

в) Замена переменной $\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} = y_1, \quad \frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} = y_2$

$\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} = u_1, \quad \frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}} = u_2$

г) получаем систему n – го порядка дифференциальных уравнений первого порядка.

С помощью методов пространства состояния.

2. От дифференциальных уравнений переходим к разностным уравнениям

$$\begin{cases} V(\kappa+1) = \Phi(T_0)V(\kappa) \\ Y(\kappa) = CV(\kappa) \end{cases}$$

где $V = [U \quad X]^T$ - обобщенный вектор.

3. получаем матрицу перехода:

$$\Phi(T_0) = V^T(\kappa+1)V^T(\kappa)\left[V(\kappa)V^T(\kappa)\right]^{-1},$$

при этом V(к) при е измерений примет значение:

$$V(\kappa) = \begin{bmatrix} v_1(1) & v_1(2) & \cdots & v_1(e) \\ \vdots & & & \vdots \\ v_n(1) & v_n(2) & \cdots & v_n(e) \end{bmatrix}$$

$$V(\kappa+1) = \begin{bmatrix} v_1(2) & v_2(2) & \cdots & v_n(2) \\ v_1(3) & v_2(3) & \cdots & v_n(3) \\ \vdots & & & \vdots \\ v_1(e+1) & v_2(e+1) & \cdots & v_n(e+1) \end{bmatrix}$$

Если $\Phi(T_0) = V^T(\kappa+1)V^T(\kappa)\left[V(\kappa)V^T(\kappa)\right]^{-1}$, то при

$$V(\kappa+1) = \begin{bmatrix} v_1(2) & v_2(3) & \cdots & v_n(e+1) \\ v_1(2) & v_2(3) & \cdots & v_n(e+1) \\ \vdots & & & \vdots \\ v_1(2) & v_2(3) & \cdots & v_n(e+1) \end{bmatrix}$$

Количество измерений определяется по аналогичной формуле для линейного регрессионного анализа.

Основная литература

1. Построение математических моделей химико-технологических процессов. Под ред. Дудникова Е.Г. - Л.: Химия, 1970. –312 с.
2. Практикум по автоматике и системам управления производственными процессами: учеб. пособие для вузов /под ред. И.М.Масленникова. -М.: Химия, 1986. -336с.
3. Гроп Д. Методы идентификации систем. - М.: Мир, 1979

Дополнительная литература

4. Ахназарова С.Л., Кафаров В.В. Методы оптимизации эксперимента в химической технологии: Учебное пособие для вузов. - 2-е изд., перераб. и дополненное. -М.: Высшая школа, 1985. -327с.